ÉNONCÉ

1. $\exists!\ f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :
- f log-convexe
- $f(1) = 1$ $(*)$
- $f(x+1) = x f(x)$

c'est la fonction $\Gamma : x \longmapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$.

et on a : $\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \Gamma_n(x)$; $\Gamma_n : x \longmapsto \dfrac{n^x\, n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}$.

2. APPLICATION : • $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) := u(x)$.

LEÇONS.

229

244

253

RÉFS.

les idées se trouvent par la plupart dans :

1. [Rudin] ana $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. p. 55 + [Rb] éléments d'analyse réelle p. 364.

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. inégalité des 3 pentes. (voir [Rb] éléments d'analyse réelle).

2. $\Gamma(x) = \lim \Gamma_n(x)$ $\forall x > 0$

DĒMO

: à l'oral.
écrit au tableau.
: pour comprendre.

Rappelle les cond à vérifier.

(*) : $\exists !\ f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ tq $\begin{cases} (1)\ f(1) = 1 \\ (2)\ f(x+1) = x f(x)\ \ \forall x > 0 \\ (3)\ f \text{ log-convexe.} \end{cases}$

EXISTENCE

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty f(t,x) dt.$

- Γ bien déf

. $\forall x > 0$, . $f(\cdot,x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+^*)$ → continue donc loc
intégrable.

. $f(t,x) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{x-1}} \in L^1(]0,1])$ car $x-1 < 1$: Riemann.

. $f(t,x) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \in L^1([1,+\infty[)$ Riemann.

. Donc $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$, et Γ bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(1) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -(-1) = 1$. car en ∞ ça fait 0.

(2) $\forall x > 0$,

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \overset{ipp}{=} \left[-t^{x-1} e^{-t}\right]_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

il faut $\lambda \notin \{0,1\}$ pour utiliser Hölder !

(3) $\forall x,y > 0$, $\lambda \in]0,1[$

$\ln(\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \lambda \ln(\Gamma(x)) + (1-\lambda)\ln(\Gamma(y))$

$\Leftrightarrow \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda\, \Gamma(y)^{1-\lambda}$ en passant à exp.

or, $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) = \int_0^\infty t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1} e^{-t} dy$

$$= \int_0^\infty t^{\lambda(x-1)} e^{-t\lambda}\, t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-t(1-\lambda)} dt$$

$$= \int_0^\infty \left(t^{x-1} e^{-t}\right)^\lambda dt \int_0^\infty \left(t^{y-1} e^{-t}\right)^{1-\lambda} dt$$

on veut sortir les puiss pr faire apparaître Γ

. $\lambda = \frac{1}{p}$. $\lambda + 1 - \lambda = \frac{1}{p} + \underbrace{1 - \frac{1}{p}}_{1/q} = 1$.

$$\int_0^\infty f(t)^{\frac{1}{p}} dt \int_0^\infty g(t)^{1/q} dt$$

$$\leq \left(\int_0^\infty \left(f(t)^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty \left(g(t)^{\frac{1}{q}}\right)^q dt\right)^{1/q}$$

faut dans tt les L^p car élever puiss change pas
intégrabilité de exp

$\leq \Gamma(x)^\lambda\, \Gamma(y)^{1-\lambda}$ par Hölder car $\lambda + 1 - \lambda = 1$.

et c'est encore vrai pr $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

UNICITÉ

Sq $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifie $(*)$.

Par (2), $\forall x > 0$, $\frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{x f(x)}{x \Gamma(x)} = \frac{f(x)}{\Gamma(x)}$ → $\neq 0$.

il suffit de regarder sur $]0,1]$.

car f et Γ vérifient $f(x+1) = x f(x)$ → entièr déter par val $]0,1]$.

Soit $x \in]0,1]$.

BUT : $f = \lim\limits_{n \to +\infty} \Gamma_n$ avec $\Gamma_n(x) = \frac{n^x \, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

l'unicité de la lim permettra de conc.

On va pr ça use th. gendarmes, encadrement. → use $\leq$ convexité

ENCADRER → use $\leq$ CONVEXITÉ

. Notons $g = \ln(f)$: g est convexe. (3).

Soit $x \in]0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. $n < n+1 < n+1+x < n+2$.

Par l'$\leq$ 3 pentes : appli 2 fois.

: $n < n+1 < n+1+x < n+2$.

+ intercaler $\frac{g(n+1+x) - g(n)}{(n+1+x) - n}$.

. $\frac{g(n+1) - g(n)}{n+1-n} \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{n+1+x-n-1} \leq \frac{g(n+2) - g(n+1)}{n+2-n-1}$

donc $\ln\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right) \leq \frac{1}{x} \ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) \leq \ln\left(\frac{f(n+2)}{f(n+1)}\right)$

donc $\ln(n^x) \leq \ln\left(\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots f(x)}{n(n-1)\cdots f(1)}\right) \leq \ln((n+1)^x)$ par (2)

$f(n+1) = n f(n)$ → récu.

et $\times x$ qui passe ds le ln.

donc $0 \leq \ln\left(\frac{f(x)}{\Gamma_n(x)}\right) \leq \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right)$

$-\ln(n^x)$. ↳ reconnaît

donc $1 \leq \frac{f(x)}{\Gamma_n(x)} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \leq 1 + \frac{1}{n}$

Ainsi, pour $f = \Gamma$, $\Gamma_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Gamma(x)$ (donc CV)

il faut montrer l'existence AVANT ! sinon cette limite est unique EN CAS D'EXISTENCE mais rien ne dit que ça converge bien.

Et $\forall x \in]0,1]$ $f(x) = \lim \Gamma_n(x)$ D'où l'unicité

2 (si le temps)

on a déjà mq $\Gamma(x) = \lim \Gamma_n(x)$, cette écriture de Γ permet de montrer d'autres identités.

APPLICATION : • $\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \quad := u(x).$

mq u vérifie les 3 prop :

reconnaît
Gale de Gauss par parité.

$$(1) : u(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt \overset{\text{cv} : t = s^2}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} \frac{s}{s} \, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

(2) $\forall x > 0$, $u(x+1)$

$$= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

$$= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$= x \, u(x).$$

$$(3) : \ln(u(x)) = \underbrace{\frac{(x-1)\ln(2)}{\pi}}_{\geq 0} + \ln\left(\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

convexe comme somme.

Donc $u = \Gamma$.

AUTRE MÉT EXISTENCE

On va mq $(\ln \Gamma)'' \geq 0$: il faut que Γ soit C^2.
En fait, elle est C^∞.

LEMME : Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0$, $\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^\infty \ln^p(t)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$.

th. dériv n signe fale, preuve à la fin si temps.

Calcul de $(\ln(\Gamma))''$

dérivable par composée

On a : $\forall x>0$, $(\ln(\Gamma(x)))'' = \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)' = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{\Gamma^2(x)}$

On veut ≥ 0 :
Donc relier Γ à ses dérivées. On voit un $()^2$ et Γ est une fale : on pense à ICS.

$\forall x>0$,

$$(\Gamma'(x))^2 = \left(\int_0^\infty \ln(t)\, t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(\ln(t)\, t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\right) dt\right)^2 \quad \text{par l'ICS}$$

$$\leq \int_0^\infty \ln^2(t)\, t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt$$

$$\leq \Gamma''(x)\Gamma(x)$$

Donc $(\ln(\Gamma))'' \geq 0$ et Γ est log-convexe.